3M

УДК 51:330.115

А.В. Морозов, А.В. Панишев
Житомирский государственный технологический университет, Украина
morozov.andriy@gmail.com

Вершинно-рёберное преобразование в гамильтоновой задаче о сельском почтальоне

В статье формулируется гамильтонова задача о сельском почтальоне, являющаяся обобщением задачи коммивояжера. Предлагается процедура вершинно-рёберного преобразования, которая выполняется непосредственно перед решением задачи.

Введение

Многочисленные результаты, накопленные в изучении проблемы коммивояжера, непрерывно развиваются, охватывая актуальные вопросы разработки и совершенствования методов комбинаторной оптимизации и их применения. Далеко не для каждой прикладной задачи типа коммивояжера известны алгоритмы поиска решения с показателями эффективности, пригодными в реальных ситуациях. Одной из таких задач является задача о сельском почтальоне, формулируемая следующим образом [1].

Задан связный взвешенный граф $H = (V, U)$ с множеством вершин V, $|V| = n$, и множеством рёбер U. Каждому ребру $\{i, j\} \in U$ приписан вес $d_{ij} \in Z_0^+$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, Z_0^+ – множество неотрицательных целых чисел. Граф H полностью определяется симметричной матрицей стоимости $\left[d_{ij} \right]_n$, где $d_{ij} \in Z_0^+$, если $\{i, j\} \in U$, и $d_{ij} = \infty$, иначе, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1, n}$. На множестве U задано непустое подмножество рёбер R. Требуется найти в графе H цикл, включающий каждое ребро из R и имеющий минимальную сумму весов всех рёбер.

Обозначим $z(R)$ гамильтонов цикл графа H, проходящий по всем рёбрам множества R. Назовём гамильтоновой задачей о сельском почтальоне (ГЗСП) задачу, которая состоит в нахождении гамильтонова цикла $z^*(R)$, минимизирующего функционал:

$$C\left(z(R)\right) = \sum_{\{k,l\} \in z(R)} d_{kl} .$$

Заинтересованность в решении ГЗСП проявляется в том случае, когда требуется определить кольцевой маршрут на транспортной сети графа или района, моделируемой графом $H = (V, U)$. Каждому пункту отправления (прибытия) сети соответствует вершина $i \in V, |V| = n$, а каждому ребру $\{i, j\} \in U$ отвечает отрезок дорожного полотна между парой соседних пунктов i и j. Ребро $\{i, j\}$ характеризуется весом (стоимостью) d_{ij}, равным затратам на перемещение транспортного средства из i в j или из j в i.

Основной результат

ГЗСП NP-полна, поскольку, в случае $R = \varnothing$, она является NP-полной гамильтоновой задачей коммивояжера (ГЗК) [1]. В [2] предложен алгоритм, который корректно находит решение ГЗК, если граф *H* гамильтонов, и устанавливает её неразрешимость в противном случае. В основе предложенного алгоритма лежит схема ветвей и границ, выполняемая после проверки достаточных условий неразрешимости ГЗСП. Ясно, что трудоёмкость такой проверки должна быть ограничена полиномом от размера задачи.

Непосредственное применение алгоритма ветвей и границ из [2] не позволяет решить ГЗСП. Включение в искомый гамильтонов цикл заданного подмножества рёбер $R \neq \varnothing$ оказывается настолько сильным ограничением, что требует иного подхода к организации ветвления и вычисления нижних оценок для $C\left(z^*(R)\right)$. В данной работе предлагается модификация классического метода ветвей и границ (метода Литтла), обеспечивающая нахождение решения как в ГЗСП, так и в ГЗК.

Очевидно, и ГЗК, и ГЗСП не имеют решений, если граф *H* содержит концевые (висячие) вершины. Висячие вершины в графе *H* находятся тривиально за время $O\left(|V|\right)$. Задачи неразрешимы, когда граф *H* имеет точку сочленения [2], [3]. Чтобы определить, содержит ли граф *H* точку сочленения, требуется $O\left(|V|+|U|\right)$ элементарных операций [3].

Нетрудно увидеть, что ГЗСП неразрешима, если в графе *H*: а) подмножество рёбер множества *R* образует негамильтонов цикл; б) существует вершина, инцидентная трём или более рёбрам из *R*. Следовательно, граф *H*, в котором множество рёбер *R* не образует совокупности вершинно-непересекающихся цепей, не содержит цикла *z*(*R*). На проверку условий а) и б) достаточно времени, ограниченного величиной $O\left(|V|+|U|\right)$.

Пусть граф *H = (V, U)* не имеет висячих вершин и точек сочленения, а множество его рёбер $R \subset U$ в ГЗСП представлено вершинно-непересекающимися цепями. Выполним вершиннно-рёберное преобразование (ВРП) графа *H*, в результате которого устанавливаются достаточные условия неразрешимости ГЗСП, дополняющие перечисленные условия.

S0. *H* = (*V*, *U*) – граф, не содержащий висячих вершин и точек сочленения; непустое множество рёбер $R \subset U$ образует совокупность *Z* вершинно-непересекающихся цепей.

S1. Если число цепей совокупности *Z* равно $|R|$, то положить $R' = R$, перейти к шагу S5.

S2. Для каждой цепи $(a,b,...,c,d) \in Z$ удалить все рёбра из $U - R$, которые: а) соединяют её любые две вершины, б) инцидентные одной вершине из $\{b,...,c\}$ – и определить степени всех вершин множества *V*. Если хотя бы одна вершина в полученном остовном подграфе графа *H* является изолированной или висячей, то ГЗСП не имеет решения.

S3. Заменить каждую цепь $(a,b,...,c,d)$ на ребро $\{a,d\}$, присвоив ему вес, равный сумме весов рёбер цепи.

S4. $H' = (V',U')$ – граф, построенный после выполнения шага S3, R' – множество всех рёбер, полученных из *R* в результате построения H'.

S5. Положить $R^0 = \varnothing$.

S6. Если граф не содержит вершин степени 2, то конец.

S7. Если множество $R' \cup R^0$ не образует паросочетания, то конец: ГЗСП неразрешима.

S8. Каждую цепь $(p,q,...,t,w)$ со степенями вершин $\delta_p,\delta_w > 2$, $\delta_q = ... = \delta_t = 2$ заменить на ребро $\{p,w\}$ с весом, равным сумме весов её рёбер; удалить из R' и R^0 все рёбра цепи, принад-

лежащие R' и R^0; положить $R^0 = R^0 \cup \{p,w\}$; если существует еще одно ребро $\{p,w\} \notin R^0 \cup R'$, удалить его.

S9. Если множество $R' \cup R^0$ не образует совокупности вершинно-пересекающихся цепей, то конец: ГЗСП неразрешима.

S10. Если степени всех вершин построенного графа равны 2, то конец: ГЗСП имеет решение, иначе положить $R^0 = \varnothing$; для каждой цепи $(p,w,...,r,v)$, все рёбра которой содержатся в $R' \cup R^0$, исключить рёбра, инцидентные вершинам $w,...,r$; исключить из R' рёбра цепи, принадлежащие R'; заменить цепь на ребро $\{p,v\}$. Если существует еще одно ребро, соединяющее *p* и *v*, удалить его; установить $R^0 = R^0 \cup \{p,v\}$, $d_{pv} = d_{pw} + ... + d_{rv}$; перейти к шагу S6.

Каждая цепь рёбер множества R является простой цепью, т.е. такой, у которой все вершины (а значит, и рёбра) различны. В противном случае она образует негамильтонов цикл, и, следовательно, ГЗСП не имеет решения. В гамильтонов цикл $z(R)$ должны входить все рёбра, образующие простую цепь $(x,a,b,...,c,d,y)$. В него не могут входить рёбра, соединяющие пары вершин $(a,b,...,c,d)$, и рёбра, инцидентные одной, вершине в $\{b,...,c\}$. Поэтому их следует удалить, рассматривая ГЗСП на остовном подграфе графа *H*, в котором могут содержаться изолированные и висячие вершины. Отсюда следует корректность действий, выполняемых на шаге S2.

Пусть остовный граф не содержит изолированных и висячих вершин, тогда вершины $a,b,...,c,d$ имеют степени $\delta_a \ge 2, \delta_b = ... = \delta_c = 2, \delta_d \ge 2$. Гамильтонов цикл $z(R)$ должен проходить все рёбра цепи $(a,b,...,c,d)$, которую можно заменить на ребро $\{a,d\}$ весом, равным сумме весов её рёбер.

Множество *R*, содержащееся в цикле $z(R)$, если он существует, представлено совокупностью *Z* вершинно-непересекающихся цепей. Поэтому каждую цепь из Z с двумя и более рёбрами следует рассматривать после выполнения шага S3 как одно ребро в цепи $z(R)$. На шаге S3 находится граф $H' = (V',U')$, $V' \subseteq V, U' \subseteq U$ и множество рёбер R', $|R'| = |Z|$, которое включено в гамильтонов цикл $z(R')$, соответствующий $z(R)$. Процесс ВРП прекращается на шаге S6, если степени всех вершин графа H' больше 2. В этом случае либо оказываются выполненными достаточные условия того, что ГЗСП не имеет решения, либо следует перейти к построению $z(R')$ по схеме метода ветвей и границ.

Если в графе H' содержатся вершины степени 2, то на шаге S5 формируется множество рёбер R^0. Каждое ребро $\{p,w\} \in R^0$, полученное на шаге S8, заменяет цепь $(p,q,...,t,w)$, $\delta_p, \delta_w > 2$, $\delta_q = ... = \delta_t = 2$, рассматриваемую как часть гамильтонова цикла $z(R)$. Поэтому из R' и R^0 можно удалить все её рёбра, которые содержатся в R' или R^0. Очевидно, ГЗСП разрешима, если в графе, построенном на шаге S8, существует гамильтонов цикл, проходящий по всем рёбрам множества $R' \cup R^0$. Если после выполнения шага S8 множество $R' \cup R^0$ представлено одним ребром, то ГЗСП имеет единственное решение. Она не имеет решения, если найдется пара цепей, состоящих из рёбер $R' \cup R^0$ и имеющих общую вершину.

Перед выполнением шага S10 множество рёбер $R' \cup R^0$ образует совокупность вершинно-непересекающихся цепей $(p,w,...,r,v)$. В графе, построенном на шаге S8,

для каждой цепи $(p,w,...,r,v)$ удаляются рёбра, инцидентные вершинам из множества $\{w,...,r\}$, поскольку они не могут входить в решение ГЗСП. На шаге S10 вновь формируется множество R^0, в которое добавляется каждое ребро $\{p,w\}$, заменяющее цепь $(p,w,...,r,v)$, а из R' исключаются все рёбра, содержащиеся в R'.

Шаги S6 – S10 повторяются, пока не будет построен граф со степенями вершин, не равными 2. Тогда, рассматривая каждое ребро в $R' \cup R^0$ построенного графа как однозвенную цепь, получим достаточное условие того, что граф *H* не содержит гамильтонова цикла $z(R)$. Таким образом, получен следующий результат.

Утверждение. Если результатом ВРП графа *H* является граф, в котором множество рёбер $R' \cup R^0$ не образует паросочетания, то ГЗСП не имеет решения.

Следовательно, ГЗСП сводится к этой же задаче на графе $H=(V,U)$, в котором: а) степени всех вершин больше 2, б) множество рёбер *R*, содержащееся в искомом гамильтоновом цикле, образует паросочетание *R*. Очевидно, $|R| \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $n = V$. Заметим, что величина $|R|$ ограничивает пространство решений настолько, что оно может оказаться пустым.

Пример

Выполним алгоритм ВРП для графа *H*, изображенного на рис. 1.

$$R = \{\{11,15\},\{15,14\},\{8,5\},\{5,3\},\{4,12\},\{1,2\}\},$$

$$Z = \{(11,15,14),(1,2),(3,5,8),(4,12)\}.$$

Предполагается, что все рёбра имеют единичный вес. Заметим, что граф содержит гамильтонов цикл

$$z(R) = (1,2,6,7,4,12,3,5,8,9,10,11,15,14,13,1).$$

Остовный подграф графа *H*, полученный на шаге S2 представлен на рис. 2.

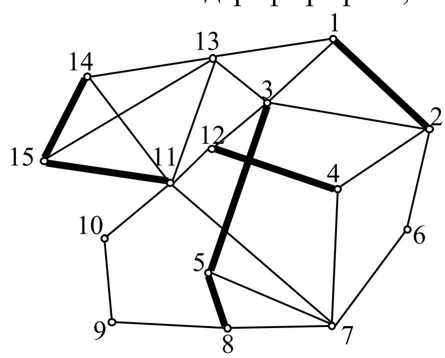


Рисунок 1

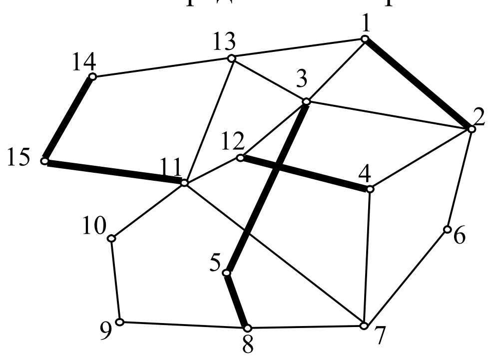


Рисунок 2

После выполнения шага S3 получим граф H' (рис. 3), где $R' = \{\{11,14\},\{3,8\},\{1,2\},\{4,12\}\}$. Положим $R^0 = \varnothing$. Построенный граф имеет вершины степени 2, а множество $R' \cup R^0$ образует паросочетание.

На шаге S8 каждая из цепей $(11,14,13)$, $(8,9,10,11)$, $(2,6,7)$ сворачивается в ребро (рис. 4), $R^0 = \{\{8,11\},\{11,13\},\{2,7\}\}$, $R' = \{\{3,8\},\{1,2\},\{4,12\}\}$.

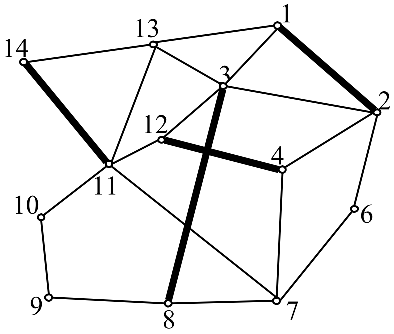


Рисунок 3

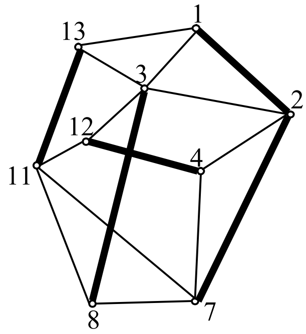


Рисунок 4

На шаге S10 $R^0 = \varnothing$, цепи $(3,8,11,13)$ и $(1,2,7)$ преобразуются в рёбра $\{3, 13\}$ и $\{1, 7\}$. Результат преобразования изображен на рис. 5; $R' = \{\{4,12\}\}$, $R^0 = \{\{3,13\},\{1,7\}\}$. Построенный граф не является гамильтоновым циклом, содержит вершины степени 2, а множество $R' \cup R^0$ образует парасочетание. Для построенного графа (рис. 5) повторяется шаг S8.

На шаге S8 рассматриваются цепи $(1,13,3)$ и $(1,7,4,12,3)$, каждая из которых заменяется на ребро $\{1,3\}$; $R' = \varnothing$, $R^0 = \{\{1,3\}\}$. Степени всех вершин построенного графа равны 2 (рис. 6), ГЗСП имеет решение.

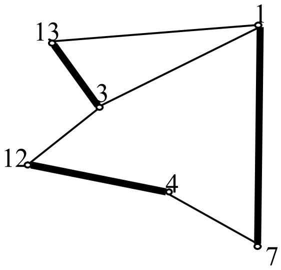


Рисунок 5

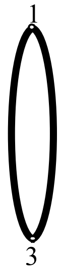


Рисунок 6

Поскольку множество $R' \cup R^0$ представлено единственным кратным ребром $\{1,3\}$, ГЗСП имеет единственное решение. Выполним восстановление гамильтонова цикла. Для этого будем разворачивать рёбра полученного графа в порядке, обратном порядку сворачивания рёбер (рис. 7).

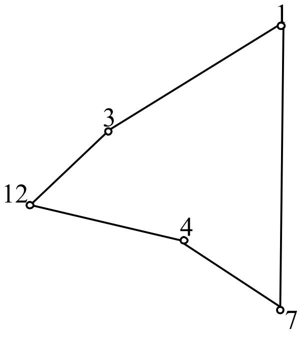


Рисунок 7

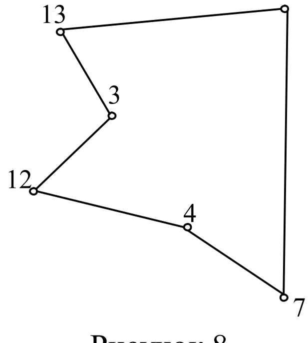


Рисунок 8

Последней осуществлялась замена ребра $\{1,3\}$ на цепь $(1,7,4,12,3)$. Поэтому заменяем ребро $\{1, 3\}$ набором рёбер $\{1, 7\}$, $\{7, 4\}$, $\{4, 12\}$, $\{12, 3\}$, образующих цепь $(1,7,4,12,3)$. Получаем граф, изображенный на рис. 8.

Далее выполняем разворачивание ребра {1, 3}, заменяя его на рёбра {1, 13} и {13, 3}, поскольку оно было свернуто в цепь $(1,13,3)$. Результат изображен на рис. 9.

Далее осуществляется разворачивание ребра $\{1,7\}$, которое было заменено на цепь $(1,2,7)$.

Продолжая процесс, выполняем замены: $\{3,13\} \to (3,8,11,13), \{2,7\} \to (2,6,7)$, $\{8,11\} \to (8,9,10,11), \{11,3\} \to (11,14,13), \{3,8\} \to (3,5,8), \{11,14\} \to (11,15,14)$.

В результате выполнения последовательности замен, получаем гамильтонов цикл $(1,2,6,7,4,12,3,5,8,9,10,11,15,14,13,1)$ на рис. 10.

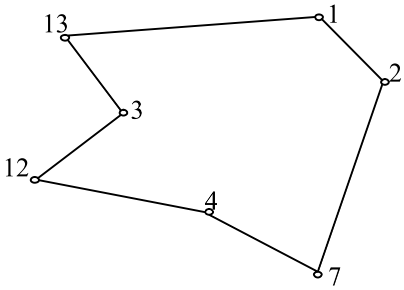


Рисунок 9

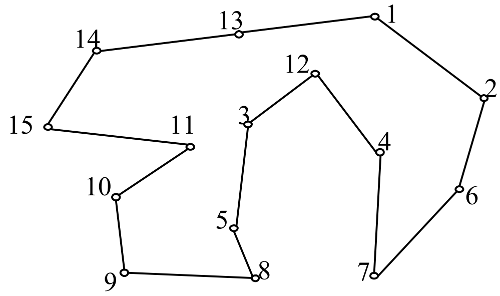


Рисунок 10

Заключение

Предложенная процедура вершинно-рёберного преобразования может быть использована непосредственно перед решением задачи [4]. В результате выполнения преобразования возможны следующие варианты:

1) найдено оптимальное решение гамильтоновой задачи о сельском почтальоне;
2) обнаружено, что задача не имеет решения;
3) получена задача меньшей размерности, требуется поиск решения задачи.

Литература

1. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982.
2. I. Garashchenko. Method of Finding Hamilton Routes in Transport Network / I. Garashchenko, A. Panishev // Artificial Intelligence and Decision Making. – ITHEA, Sofia. – 2008. – № 7. – P. 43-48.
3. Теория расписаний и вычислительные машины / под. ред. Э.Г. Коффмана. – М. : Наука, 1984.
4. Garashchenko I. Method of Finding Hamilton Routesin Transport Network / Irina Garashchenko, Anatoliy Panishev // Artificial Intelligence and Decision Making. – ITHEA, Sofia. – 2008. – № 7. – P. 43-48.

А.В. Морозов, А.В. Панишев

Вершинно-реберні перетворення у гамільтоновій задачі про сільського листоношу

У статті формулюється гамільтонова задача про сільського листоношу, яка є узагальненням задачі комівояжера. Пропонується процедура вершинно-реберного перетворення, яка виконується безпосередньо перед розв'язанням задачі.

A.V. Morozov, A. V. Panishev

Vertex-edge Transformation in the Hamiltonian Rural Postman Problem

The Hamiltonian Rural Postman Problem which is generalisation of the Travelling Salesman Problem is formulated in this article. Procedure of vertex-edge transformation which is applied before a problem solving is offered.

Статья поступила в редакцию 01.06.2009.